

## Ejercicios de Análisis Matemático

### Derivadas y sucesiones

1. Calcula las dimensiones (radio y altura) de una lata cilíndrica de un litro de capacidad cuyo costo de producción sea mínimo. Se supone que no se desperdicia aluminio al cortar los lados de la lata, pero las tapas de radio  $r$  se cortan de cuadrados de lado  $2r$  por lo que se produce una pérdida de metal.
2. En la orilla de un río de 100 metros de ancho está situada una planta eléctrica y en la orilla opuesta, y a 500 metros río abajo, se está construyendo una fábrica. Sabiendo que el río es rectilíneo entre la planta y la fábrica, que el tendido de cables a lo largo de la orilla cuesta a 9 euros cada metro y que el tendido de cables sobre el agua cuesta a 15 euros cada metro, ¿cómo debe hacerse el tendido entre la planta eléctrica y la fábrica para que su coste sea mínimo?.

**Sugerencia.** En los dos ejercicios anteriores debes justificar que los valores obtenidos son mínimos absolutos, el criterio de la derivada segunda no debe usarse.

3. Calcula el límite de las sucesiones:

$$a) x_n = \frac{\frac{2}{1} + \frac{3^2}{2} + \frac{4^3}{3^2} + \cdots + \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}}{n^2} \quad b) x_n = \left( \frac{\log(n+2)}{\log(n+1)} \right)^{n \log n} \quad c) x_n = n \left( \log \left( \frac{n+1}{n} \right)^n - 1 \right)$$

**Sugerencias.** Para  $a)$  usa el criterio de Stolz, para  $b)$  el criterio de equivalencia logarítmica y para  $c)$  un límite funcional apropiado (y bien conocido).

**El siguiente ejercicio es optativo.**

4. Dado un número  $a$  tal que  $0 \leq a < \sqrt{5}$ , se define una sucesión  $\{x_n\}$  por  $x_1 = a$ , y para todo  $n \in \mathbb{N}$ :

$$x_{n+1} = \frac{3x_n + 5}{x_n + 3}$$

a) Prueba que la sucesión  $\{x_n\}$  es estrictamente creciente y mayorada.

b) Prueba que  $\left| \sqrt{5} - x_{n+1} \right| \leq \frac{4}{9} \left| \sqrt{5} - x_n \right|$ .

c) Partiendo del valor inicial  $a = 2$ , calcula  $n \in \mathbb{N}$  por la condición de que  $\left| \sqrt{5} - x_{n+1} \right| < 10^{-6}$ .

**Sugerencias.** Considera la función  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \frac{3x+5}{x+3}$ . Para el apartado a) estudia la monotonía y los puntos fijos de  $f$ . Para b) usa el teorema del valor medio. El apartado c) se hace con facilidad a partir de la desigualdad probada en b) (puedes usar *Mathematica* para calcular el valor pedido de  $n$ ). La estrategia 7.32 (página 352) del libro de Cálculo Diferencial te será muy útil.

**Lecturas obligatorias.** Debes leer y entender las definiciones y resultados principales del Capítulo 7, pero no es preciso que estudies las demostraciones.